

5. EXTRÉMY - POUŽITÍ VĚTY O MULTIPLIKÁTORECH

hylova@karlin.mff.cuni.cz, <http://karlin.mff.cuni.cz/~hylova/>

Příklad 1a: $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$, $M = \{[x, y, z], x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

Množina M je kompaktní a funkce f spojitá, nabývá tedy na M minima a maxima. Pro nalezení bodů, kde se minimum a maximum nabývá, použijeme větu 19 z přednášky. V souladu se značením z této věty označíme $g = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ a položíme $G = \mathbb{R}^3$. Funkce f i g jsou třídy C^1 na $\mathbb{R}^3$ (dokonce C^∞). Spočítáme gradienty:

$$\nabla f(x, y, z) = (1, -2, 2)$$

$$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z).$$

Vektor $(2x, 2y, 2z)$ je lineárně závislý právě tehdy, když $[x, y, z] = [0, 0, 0]$ – tento bod ale neleží v M . Podle věty 19 dostáváme soustavu rovnic pro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$1 + 2\lambda x = 0$$

$$-2 + 2\lambda y = 0$$

$$2 + 2\lambda z = 0$$

Neexistuje obecný postup, jak takovou soustavu rovnic řešit. Zajímají nás hodnoty x, y a $z - \lambda$ je pouze pomocná a její hodnota nás explicitně nezajímá. V tomto případě můžeme sečíst druhou a třetí rovnici a dostaneme $2\lambda(y + z) = 0$. Nyní buď $\lambda = 0$, to ale nemůže nastat, protože rovnice pak nejsou splněné, nebo $z = -y$. Podobně sečtením dvojnásobku první rovnice s druhou rovnicí dostaneme $2\lambda(2x + y) = 0$, neboli $y = -2x$. Podeřelé body tedy budou ve tvaru $[x, -2x, 2x]$ a zbývá dopočítat hodnotu x . Aby takový bod ležel v M , musí splňovat $g(x, -2x, 2x) = 0$, neboli $x^2 + (-2x)^2 + (2x)^2 = 1$.

Tato rovnost platí pro $x = \frac{1}{3}$ a $x = -\frac{1}{3}$.

Máme body $A = [\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$ a $B = [-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}]$. Dosazením do f zjistíme, že f nabývá minima -3 v B a maxima 3 v A .

Příklad 12: $f(x, y) = 2x + 4y$, $M = \{[x, y]; \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Množina M je kompaktní, protože je omezená a uzavřená. Funkce f je spojitá na $\mathbb{R}^2$, tudíž nabývá na M maxima a minima. Rozdělíme si množinu M na čtyři části:

1. $M_1 = \{[x, y]; \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} < 1, x > 0, y > 0\}$

Množina M_1 je otevřená, hledáme tedy stacionární body:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2, \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4$, tedy žádný stacionární bod uvnitř M_1 není.

2. $M_2 = \{[0, y]; y \in \langle 0, 1 \rangle\}$

Dosadíme do f : $f(y) = 4y$. Na intervalu $(0, 1)$ je $f'(y) = 4 \neq 0$, takže máme podezřelé pouze koncové body intervalu, konkrétně

$$A = [0, 0], B = [0, 1].$$

3. $M_3 = \{[x, 0]; x \in \langle 0, 1 \rangle\}$

Analogicky jako u M_2 zjistíme, že uvnitř žádný stacionární bod není, přibyl akorát hraniční bod $C = [1, 0]$.

4. $M_4 = \{[x, y]; \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, x > 0, y > 0\}$

Na M_4 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů (větu 19 nebo větu 18) s vazební podmínkou $g(x, y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} - 1$ a

$G = \{[x, y]; x > 0, y > 0\}$. Funkce f i g jsou třídy C^1 na G a pro gradienty platí:

$$\nabla f(x, y) = (2, 4)$$

$$\nabla g(x, y) = \left(\frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}, \frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}} \right).$$

Pro všechna $[x, y] \in G$ platí $\nabla g(x, y) \neq 0$, dostáváme tedy systém rovnic

$$2 + \lambda \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} = 0$$

$$4 + \lambda \frac{1}{4\sqrt[4]{y^3}} = 0$$

pro $\lambda \in \mathbb{R}$. Přičteme dvojnásobek první rovnice ke druhé a po úpravě dostaneme $x = 2\sqrt[3]{2}y$ (podobně jako v předchozím příkladu nemůže platit

$\lambda = 0$). Jelikož musí zároveň platit $g(x, y) = 0$, máme $y = \left(\frac{1}{1 + \sqrt[3]{2}} \right)^4$.

$$\text{Dohromady: } D = \left[\frac{2\sqrt[3]{2}}{(1 + \sqrt[3]{2})^4}, \frac{1}{(1 + \sqrt[3]{2})^4} \right].$$

Porovnáním funkčních hodnot zjistíme, že f má minimum 0 v bodě A a maximum 4 v bodě B .